UNIDADE IV- GEOMETRIA ANALÍTICA I: Estudo do Ponto e da Reta

1- Situando a Temática

O ensino da geometria é de grande interesse na atualidade. A revolução da informática traz como uma de suas ferramentas mais poderosas a visualização e a manipulação precisa de imagens. Na área médica, o impacto dos diagnósticos baseados em imagens foi espetacular. Também nas engenharias, as imagens ampliaram em muito a capacidade de projetar e planejar.

O estudante do Ensino Médio, ao qual vocês terão a oportunidade de lecionar, hoje tem uma grande probabilidade de vir a trabalhar no futuro com um software que empregue as imagens como forma de comunicação com os elementos humanos envolvidos na atividade.

Neste momento, o estudo de geometria, principalmente o da geometria analítica, com conceitos como o de sistema de eixos, coordenadas e outros, pode tornar o ambiente de trabalho muito mais familiar ao estudante. Não queremos dizer aqui que o estudante irá aplicar teoremas complicados na sua atividade, mas sim que seu estudo anterior de geometria fará com que se sinta menos perdido em um ambiente organizado pela geometria.

2- Problematizando a Temática

Contemporâneo de Kepler e Galileu, René Descartes (1596-1650) unifica a aritmética, a álgebra e a geometria, e cria a geometria analítica: um método que permite representar os números de uma equação como pontos em um gráfico, as equações algébricas como formas geométricas e as formas geométricas como equações.

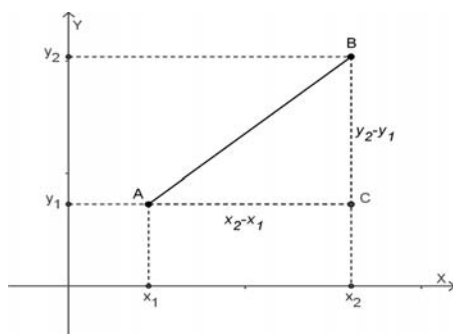
Descartes prova que é possível determinar uma posição em uma curva usando apenas um par de números e duas linhas de referência que se cruzam perpendicularmente: um dos números indica a distância vertical e, o outro, a distância horizontal. Esse tipo de gráfico representa os números como pontos e as equações algébricas como uma seqüência de pontos. Ao fazer isso, descobre que as equações de 2º grau transformam-se em linhas retas ou nas curvas cônicas, demonstradas por Apolônio 19 séculos antes: $x^2 - y^2 = 0$ forma duas linhas cruzadas, $x^2 + y^2 = 4$ forma um círculo, $x^2 - y^2 = 4$ forma uma hipérbole; $x^2 + 2y^2 = 4$, uma elipse; e $x^2 = 4y$, uma parábola. As equações de grau maior ou igual a 3 dão origem a curvas em forma de corações, pétalas, espiras e outras. Atualmente, as linhas que se cruzam são chamados de eixos cartesianos. A linha vertical é o eixo dos y (ordenada) e a linha horizontal é o eixo dos x (abscissa).

3- Conhecendo a Temática

Na disciplina Matemática para o Ensino Básico II, você teve a oportunidade de conhecer e trabalhar com o sistema cartesiano de coordenadas. Desse modo as figuras podem se representadas através de pares ordenados, equações ou inequações.

3.1- Cálculo da Distância entre Dois Pontos

Dados dois pontos quaisquer $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$, iremos estabelecer uma expressão que indique a distância entre A e B.

Observe o triângulo ABC representado abaixo:

Pelo teorema de Pitágoras temos:

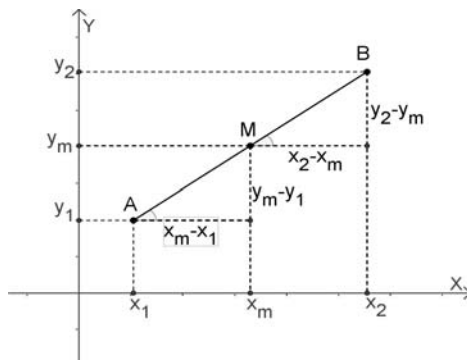
$$\left[d(A,B)\right]^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

Portanto, dados dois pontos $A=(x_1, y_1)$ e $B=(x_2, y_2)$, a distância entre eles é dada por:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3.2- Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento de Reta

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ tal que $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, vamos determinar as coordenadas de M, ponto médio de $\overline{AB}$.

Observe que, pela figura abaixo temos $AM = MB$ e assim $\frac{AM}{MB} = 1$.

Assim:

$$x_m - x_1 = x_2 - x_m \Rightarrow x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

e .

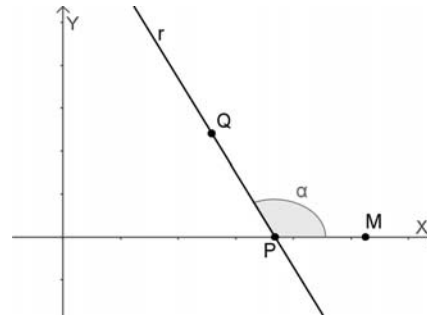
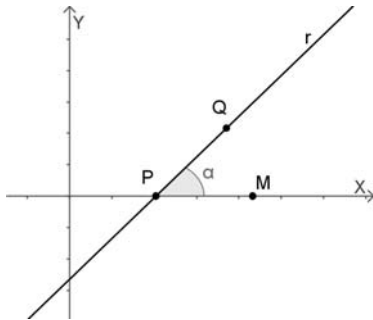
$$y_m - y_1 = y_2 - y_m \Rightarrow y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio são dadas por $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

3.3- Equação da Reta

3.3.1 – Inclinação e Coeficiente Angular da Reta

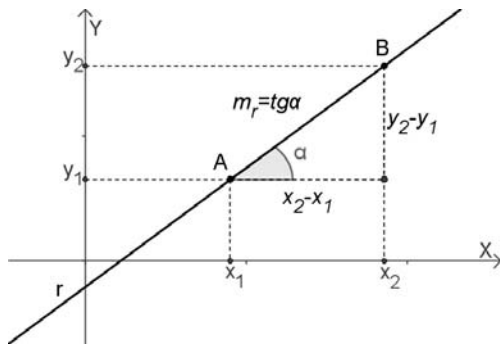
Sabemos que, dados dois pontos distintos A e B de uma reta, podemos representá-la no plano cartesiano. No entanto, existe outra forma de determinar uma reta: basta ter um ponto P da reta e o ângulo α, que a reta forma com o eixo 0x, medido no sentido anti-horário.

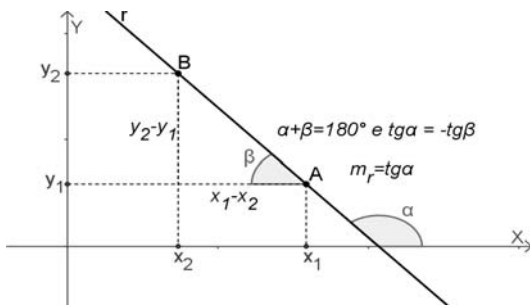
Definição: Seja r uma reta do plano cartesiano ortogonal concorrente com o eixo 0x no ponto $P = (x_0, 0)$ e que passa pelo ponto $Q = (x_q, y_q)$, com $y_q > 0$. Seja $M(x_m, 0)$, com $x_m > x_p$:

Chama-se inclinação da reta r a medida α, com $0° \leq \alpha < 180°$, do ângulo MPQ orientado a partir do lado $\overline{PM}$ no sentido anti-horário.

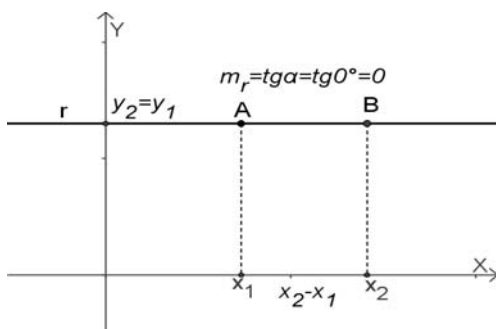
Definição: Chama-se coeficiente angular de uma reta r de inclinação α, com $\alpha \neq 90°$, o número real m_r tal que $m_r = tg\alpha$.

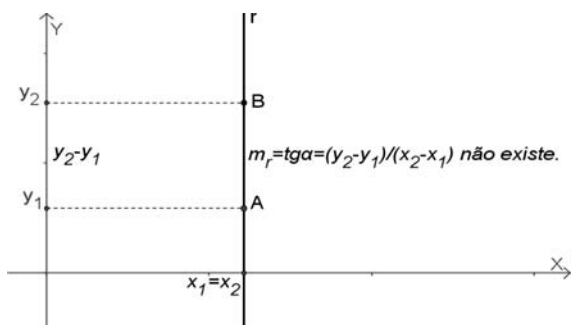
Observação: Retas verticais não possuem coeficiente angular, pois não existe $tg 90°$.

Consideremos dois pontos distintos de $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ em uma reta r, de inclinação α. Desta forma temos os seguintes casos:

I) $\alpha < 90°$

Temos que $m_r = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e mais, como $0° \leq \alpha \leq 90°$ então $m_r > 0$.

II) $\alpha > 90°$

Note que $\alpha + \beta = 180°$, ou seja, α e β são suplementares e assim $tg\alpha = -tg\beta$. Como $tg\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, então $m_r = tg\alpha = -\dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_1 - x_2)} = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$, onde $m_r < 0$, pois $\alpha > 90°$.

III) $\alpha = 0°$

Note que $m_r = tg\alpha = tg0° = 0$. Como $y_1 = y_2$ e $x_1 \neq x_2$, então $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0 = tg\alpha$, e assim, podemos dizer que neste caso também vale a relação $m_r = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

IV) $\alpha = 90°$

Sabemos que $tg90°$ não existe, ou seja, a reta r não possui coeficiente angular.

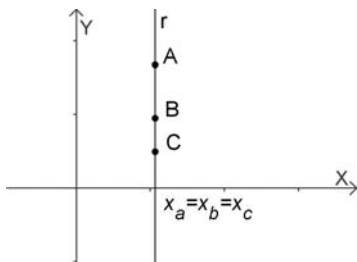
Portanto dado dois pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ de uma reta, teremos $m_r = tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, com $\alpha \neq 90°$.

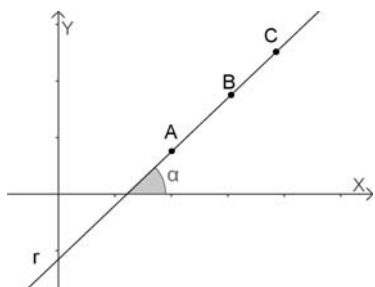
Teorema 1: Três pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e C=(x_3, y_3) são colineares se, e somente se, $m_{AB} = m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

Demonstração:

Primeiramente iremos mostrar que:

A, B, C são colineares $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC}$ ou não existir m_{AB} e m_{BC}.

Observe, pela figura abaixo, que se *A, B* e *C* pertencem a uma única reta vertical, então $x_1 = x_2 = x_3$ e assim $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $m_{BC} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ não existem.

Se *A, B* e *C* pertencem a uma reta não vertical com inclinação $\alpha\left(\alpha \neq 90°\right)$, então $m_{AB} = tg\alpha$ e $m_{BC} = tg\alpha$, isto é, $m_{AB} = m_{BC}$

como mostra a figura abaixo.

Mostraremos agora a recíproca, ou seja:
$m_{AB} = m_{BC}$ ou não existir m_{AB} e m_{BC} $\Rightarrow A,B,C$ são colineares
.

Se $m_{AB} = m_{BC}$, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, as quais possuem o ponto *B* em comum e, portanto, os pontos *A, B* e *C* são colineares.

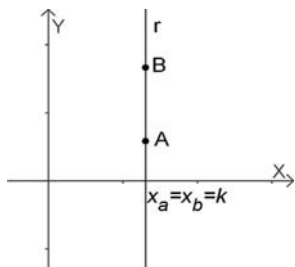
Se m_{AB} e m_{BC} não existem, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são verticais e, portanto, são paralelas. Ora, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e têm o ponto *B* em comum, então são coincidentes e assim *A, B* e *C* são colineares.

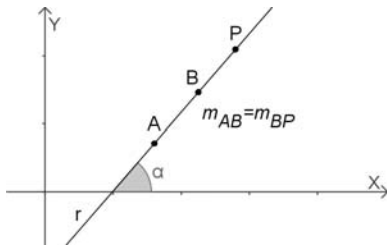
Exercício 1: Verifique se os pontos $A = \left(1,6\right), B = \left(-2,-6\right)$ e $C = \left(3,14\right)$ são colineares.
Solução:
Devemos calcular m_{AB} e m_{BC}. Temos que $m_{AB} = \frac{-6-6}{-2-1} = 4$ e $m_{BC} = \frac{14+6}{3+2} = 4$. Como $m_{AB} = m_{BC}$ então os pontos *A, B* e *C* estão alinhados.

3.3.2 – Equação Fundamental, Equação Reduzida e Equação Geral da Reta

Sabemos que dois pontos distintos *A* e *B* determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos *A* e *B*, existe uma única reta que passa pelos dois pontos e mais $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se $x_2 \neq x_1$.

Vamos agora determinar a equação da reta que passa pelos pontos distintos $A = \left(x_1, y_1\right)$ e $B = \left(x_2, y_2\right)$. Temos que considerar duas situações:

I) $x_1 = x_2 = k$, ou seja, a reta que passa por *A* e *B* é uma reta vertical.

Portanto a reta *r* é a reta formada pelos pontos $\left(k, y\right)$, ou seja, os pontos de abscissa $x = k$. Neste caso, a equação da reta é $r : x = k$.

II) $x_2 \neq x_1$, ou seja, a reta *r* que passa pelos pontos *A* e *B* não é uma reta vertical.

Considerando $P=(x,y)$ um ponto genérico dessa reta, temos que $m_{AB}=m_{BP}$, pois os pontos *A, B* e *P* estão alinhados. Assim, como $m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e $m_{BP}=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

então $\dfrac{y-y_2}{x-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow \boxed{y-y_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)}$.

Portanto a equação da reta que passa pelos pontos distintos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ é dado por $y-y_2=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2)$, ou $y-y_2=m_r(x-x_2)$ onde $m_r=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ é coeficiente angular da reta. Essa equação é denominada **Equação Fundamental** da reta.

Observação:

I) Se escolhermos o ponto particular $(0,n)$ em que a reta intercepta o eixo y, pela equação anterior teremos: $y-n=m_r(x-0)\Rightarrow y=mx+n$

A equação $y=m_rx+n$ é denominada **Equação Reduzida** da reta *r* onde *n* é chamado coeficiente linear.

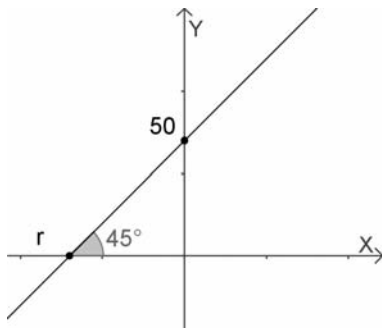
II) Caso a reta *r* seja horizontal então $m_r=tg0°=0$ e assim teremos $y-y_p=0(x-x_p)$, ou seja, a equação reduzida da reta horizontal *r* que passa pelo ponto $P(x_p,y_p)$ é dada por $y=y_p$.

III) Podemos ainda representar uma reta *r* através da equação *ax + by + c = 0*, oriunda da equação fundamental $y-y_p=m_r(x-x_p)$. A equação *ax + by + c = 0* é denominada **Equação Geral** da reta *r*.

Exercício 2*:* Determinar as equações da reta *r* que passa pelo ponto $P=(4,-3)$ e tem coeficiente angular $m=-2$.

Solução:

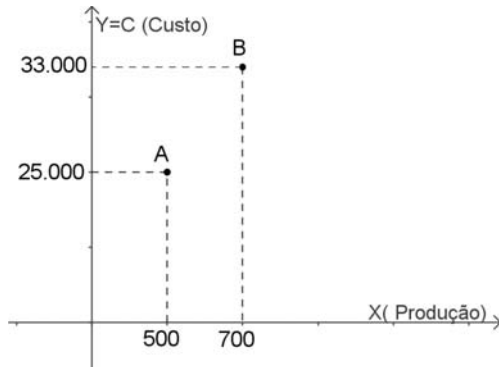
Sabemos que a equação fundamental da reta *r* é dada por: $y-y_p=m(x-x_p)$ e assim $y-(-3)=-2(x-4)\Rightarrow y=-2x+5$ (equação reduzida) ou $2x+y-5=0$ (equação geral).

Exercício 3: Determinar a equação da reta *r* cujo gráfico está representado abaixo:

Solução: Observe que a reta *r* passa pelo ponto $P=(0,50)$ e possui coeficiente angular $m_r=tg45°=1$.

Logo $y-50=1(x-0)\Rightarrow y=x+50$ ou $x-y+50=0$.
Portanto a reta *r* tem como equação geral $x-y+50=0$ e $y=x+50$ é sua equação reduzida.

Exercício 4: Um gerente de uma loja de bolsas verificou que quando se produzia 500 bolsas por mês, o custo mensal da empresa era R$ 25.000,00 e quando se produzia 700 bolsas o custo era R$ 33.000,00. Sabe-se que cada bolsa é vendida por R$ 52,50.

a) Admitindo que o gráfico do custo mensal (C) em função do número x de bolsas produzido por mês, seja formado por pontos de uma reta, obtenha C em função de x.
b) Seja R a receita mensal obtida pela venda de x unidades produzidas. Obtenha R em função de x.
c) Represente graficamente, num mesmo plano cartesiano, o custo e a receita mensal desta loja de bolsas.

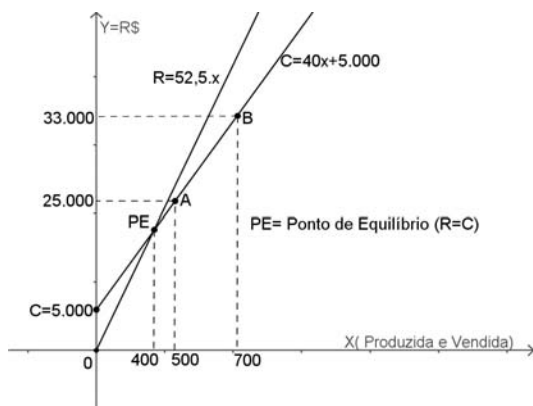
Solução: a) Graficamente temos a seguinte situação:

Como o custo mensal (C) é formado por uma reta que passa por A e B então

$$m_r = \frac{33.000 - 25.000}{700 - 500} = \frac{8000}{200} = 40 .$$

Assim a equação da reta é dada por: $y - 25000 = 40(x - 500) \Rightarrow y = 40x + 5000$.

Portanto temos $C = 40x + 5000$ onde C é o custo mensal e x é a quantidade produzida.

b) A receita (R) pela venda de uma determinada mercadoria nada mais é do que o produto do preço de venda pela quantidade vendida, ou seja, $R = p.q$. Como o preço de venda é de R$ 52,50 a unidade e x representa a quantidade vendida, então $R = 52,50.x$.

c) Os gráficos das retas $C = 40x + 5000$ e $R = 52,50.x$ estão representado abaixo:

Observe que as retas $C = 40x + 5000$ e $R = 52,5.x$ estão representadas apenas no 1° quadrante, pois o valor de x que representa a produção e a venda é sempre maior ou igual a zero $(x \geq 0)$.

Logo, se a produção for de zero unidade, a empresa terá um custo de R$ 5.000,00, que, em Economia, é denominado custo fixo, devido ao fato de que existem custos fixos que não dependem da produção como, por exemplo, aluguel, folha de pagamento entre outras.

Ampliando o seu conhecimento...

O ponto de intersecção entre a Receita (R) e o Custo(C) e é denominado, em Economia, como Ponto de Equilíbrio (PE). Para determinar esse ponto, basta resolver a equação R = C que neste caso encontraremos x = 400 unidades. Este ponto de equilíbrio significa que o lucro obtido pela produção e venda de 400 unidades é zero. Observe, pelo gráfico acima, que se $x > 400$ a empresa obterá lucro e, caso $x < 400$, a empresa terá prejuízo.

3.3.2.1-Equações Paramétricas da Reta

Vimos que a equação de uma reta pode ser apresentada nas formas: geral, reduzida ou fundamental. Por exemplo, a equação geral $2x + 4y + 4 = 0$ representa uma reta r.

Observe que se $x = t + 2$, onde $t \in \mathbf{R}$, então $2(t+2) + 4y + 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}t - 2$.

Desta forma, a reta r pode ser representada pelas equações

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\dfrac{t}{2} - 2 \end{cases} \qquad t \in R$$

denominadas **Equações Paramétricas** da reta.

Generalizando, podemos apresentar as coordenadas de cada ponto $P = (x, y)$ de uma reta r em função de um parâmetro t.

$$r: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são expressões do 1° grau. Estas são as **equações paramétricas** da reta r.

Ampliando o seu conhecimento...

Quando as equações paramétricas são usadas em situações práticas, como na física, química, economia etc., o parâmetro t pode representar qualquer grandeza como tempo, temperatura, pressão, preço etc.

Exercício 5: Um ponto $P = (x, y)$ descreve uma trajetória no plano cartesiano, tendo sua posição a cada instante t $(t \geq 0)$ dada pelas equações $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$. Determine a distância percorrida pelo ponto $P = (x, y)$ para $0 \leq t \leq 3$.

Solução: Para $t = 0$ temos $x = 2 \cdot 0 = 0$ e $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$ e assim obtemos o ponto da reta $P_1 = (0, 2)$. Analogamente quando $t = 3$, teremos $x = 2 \cdot 3 = 6$ e $y = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ e obtemos outro ponto da reta r, $P_2 = (6, 7)$.

Desta forma, iremos calcular a distância percorrida pelo ponto $P(x, y)$ (para $0 \leq t \leq 3$) do ponto inicial $P_1 = (0, -2)$ $(t = 0)$ ao ponto final $P_2 = (6, 7)$ $(t = 3)$.

Logo $d(P_1, P_2) = \sqrt{(6-0)^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$. Portanto a distância percorrida pelo ponto $P = (x, y)$ para $0 \leq t \leq 3$ é $3\sqrt{13}$ u.c.

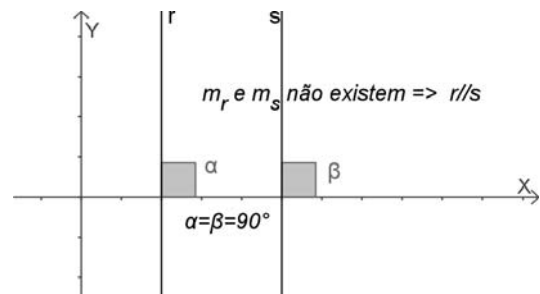
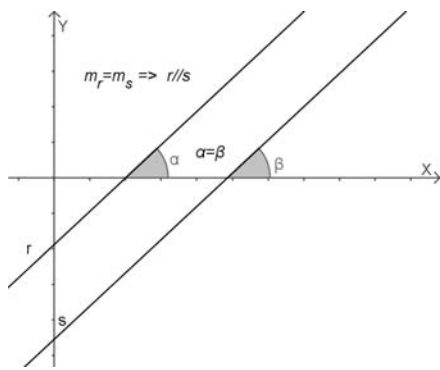
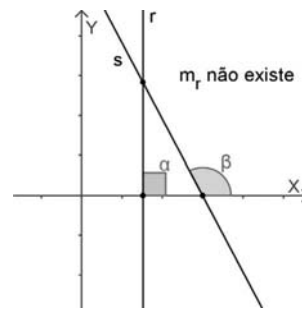
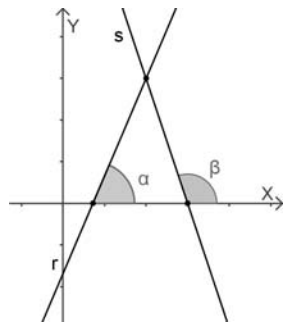
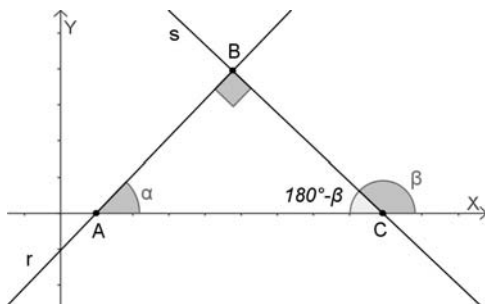
Observação:

Como $r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 2 \end{cases}$, podemos determinar a equação geral da reta da fazendo $t = \dfrac{x}{2}$ e assim, $y = \dfrac{3x}{2} - 2 \Rightarrow \dfrac{3}{2}x - y - 2 = 0$ ou, equivalentemente, $3x - 2y - 4 = 0$.

No Moodle...

Na Plataforma Moodle você encontrará vários exercícios envolvendo este conteúdo. Acesse e participe!

3.4 – Posição Relativa de Duas Retas

Duas retas r e s contidas no mesmo plano são paralelas ou concorrentes. Desta forma, note que duas retas r e s são paralelas se, e somente se, possuem o mesmo coeficiente angular $(m_r = m_s)$, ou não existem m_r e m_s.

Conseqüentemente, duas retas são concorrentes se $m_r \neq m_s$ ou somente um dos coeficientes m_r ou m_s, não existe.

Considere agora duas retas *r* e *s* perpendiculares.

Sabemos que $m_r = tg\alpha$ e $m_s = tg\beta$, e mais, que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é180° e assim $\beta = 90° + \alpha$.

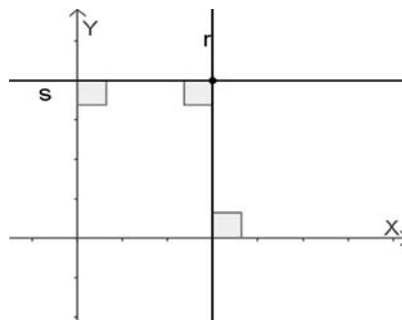
Desta forma, $tg\beta = tg\left(90° + \alpha\right) = \dfrac{sen\left(90° + \alpha\right)}{\cos\left(90° + \alpha\right)}$.

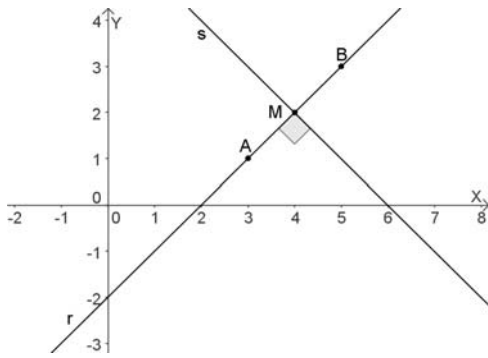
Da trigonometria, temos que

$sen\left(90° + \alpha\right) = \cos\alpha,\ \cos\left(90° + \alpha\right) = -sen\alpha$ e $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$, assim:

$tg\beta = \dfrac{\cos\alpha}{-sen\alpha} = -\cot g\alpha = -\dfrac{1}{tg\alpha}$, ou seja, $m_s = -\dfrac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_r.m_s = -1$.

Portanto, duas retas, nenhuma delas vertical, são perpendiculares se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas for oposto do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja, $m_s = -\dfrac{1}{m_r}$.

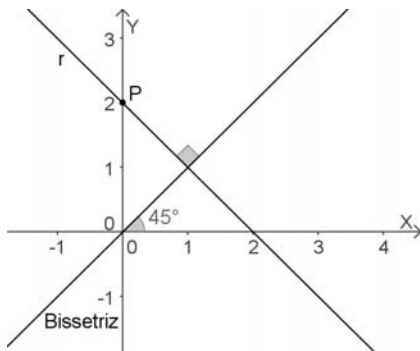
Note que, sendo *r* uma reta vertical, uma reta *s* é perpendicular a *r* se, e somente se, *s* é horizontal ($m_s = 0$).

Exercício 6: Qual é a equação reduzida da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, dados $A=(3,1)$e $B=(5,3)$?

Solução: A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$ e é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Temos que $M=\left(\frac{3+5}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(4,2)$, $m_{AB}=\frac{3-1}{5-3}=\frac{2}{2}=1$ e que $m_s=-\frac{1}{m_{AB}}=-1$.

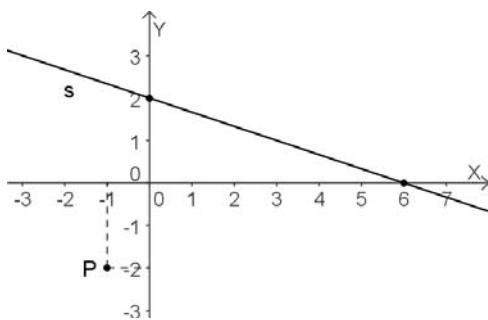
Pela equação fundamental da reta, $y-y_M=m_s\left(x-x_M\right)$ e assim $y-2=-1(x-4)$.

Portanto, a equação reduzida da mediatriz é $s: y=-x+6$.

Exercício 7: A reta r perpendicular à bissetriz dos quadrantes impares (1º e 3º) e intercepta um eixo coordenado no ponto $P=(0,2)$. Escreva a equação geral da reta r.

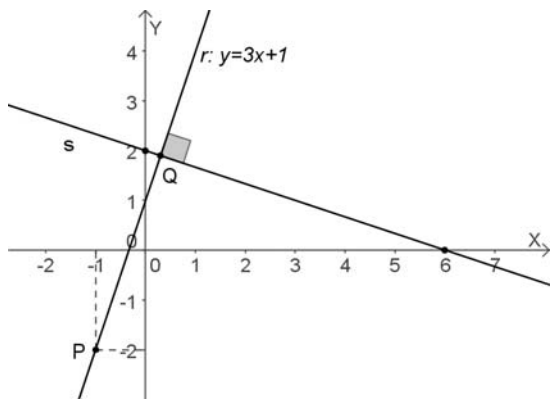
Solução: Observe a ilustração gráfica abaixo.

Para encontrar a equação geral da reta ***r*** precisamos do coeficiente angular m_r e do ponto da reta $P=(0,2)$. Como ***r*** é perpendicular a s então $m_r=-\frac{1}{m_s}$. Pelo gráfico acima $m_s=tg45°=1$ e assim $m_r=-1$.

A equação fundamental é dada por $y-y_p=m_r\left(x-x_p\right)$. Logo $r: y-2=-1(x-0)$ e, portanto a equação geral da reta r é $x+y-2=0$.

Exercício 8: Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P=(-1,-2)$ e é perpendicular á reta s representada no gráfico abaixo.

Solução:

Para determinar a equação da reta que passa por $P=(-1,-2)$e que é perpendicular à reta s precisamos determinar m_r, dado por $m_r=-\frac{1}{m_s}$. Como a reta s passa pelos pontos $A=(6,0)$ e $B=(0,2)$, então $m_s=\frac{2-0}{0-6}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$.

Assim $m_r=-\frac{1}{(-1/3)}=3$. Desta forma pela equação fundamental da reta teremos:

$r: y-(-2)=3(x-(-1)) \Rightarrow r: \boxed{y=3x+1}$ que é a equação reduzida da reta (ver figura abaixo).

Caso você queira determinar o ponto Q, que é a intersecção entre as retas r e s, procederemos da seguinte forma.

Primeiramente, precisamos da equação da reta s. Como s passa pelo ponto $A=(6,0)$ e $m_s = -\frac{1}{3}$ então $s: y-0=-\frac{1}{3}(x-6) \Rightarrow s: \boxed{y=-\frac{1}{3}x+2}$.

Assim, como $Q \in r$ e $Q \in s$ então o ponto Q será a solução do sistema:

$$\begin{cases} y = 3x+1 & \text{(reta } r\text{)} \\ y = -\frac{1}{3}x+2 & \text{(reta } s\text{)} \end{cases}.$$

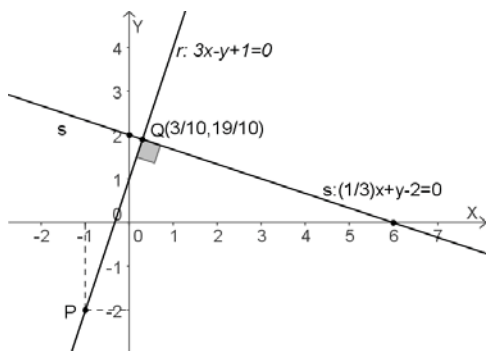
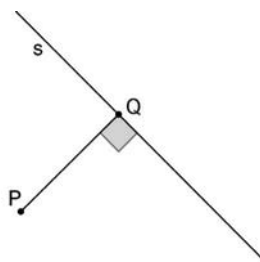
Teremos $3x+1=-\frac{1}{3}x+2 \Rightarrow x=\frac{3}{10}$ e conseqüentemente $y=\frac{19}{10}$.

Portanto o ponto de interseção das retas r e s é o ponto $Q=\left(\frac{3}{10},\frac{19}{10}\right)$.

3.5 – Estudo Complementar da Reta

3.5.1 – Distância Entre Ponto e Reta

A distância entre um ponto P a uma reta r é a distância entre P e Q, onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r.

Por exemplo, no exercício 8 encontramos a equação da reta r que passa pelo ponto $P=(-1,-2)$ e é perpendicular à reta $s: \frac{1}{3}x+y-2=0$.

O ponto $Q=\left(\frac{3}{10},\frac{19}{10}\right)$ é a intersecção das retas r e s, e o segmento $\overline{PQ}$ é a projeção ortogonal de P sobre a reta s.

Vamos calcular a distância do ponto $P=(-1,-2)$ ao ponto $Q=\left(\frac{3}{10},\frac{19}{10}\right)$.

Neste caso, temos $d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{3}{10}-(-1)\right)^2+\left(\frac{19}{10}-(-2)\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{10}\right)^2+\left(\frac{39}{10}\right)^2}=$

$=\sqrt{\frac{169}{100}+\frac{1521}{100}}=\sqrt{\frac{1690}{100}}=\frac{13}{\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{10}$.

Portanto a distância entre o ponto $P=(-1,-2)$ e a reta $s: \frac{1}{3}x+y-2=0$ é $d(P,s)=\frac{13\sqrt{10}}{10}$ u. c.

Generalizando o raciocínio utilizado no exercício 8, obtemos o resultado descrito pelo teorema a seguir.

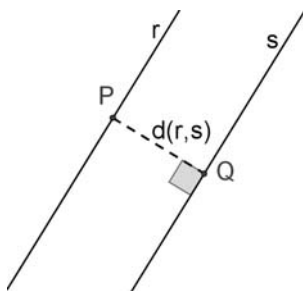
Teorema 2: A distância d entre um ponto $P=(x_0,y_0)$ e uma reta $r: ax+by+c=0$ é dada por: $d=d(P,r)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Devido à extensão, não apresentaremos a demonstração deste teorema. No entanto, na disciplina de Cálculo Vetorial você encontrará este teorema com uma demonstração bastante simples.

Exercício 9: Calcular a distância entre as retas $r: 2x+y+4=0$ e $s: 4x+2y-6=0$.

Solução:

Primeiramente vamos verificar a posição relativa entre as retas pois, caso as retas sejam concorrentes ou coincidentes, a distância entre elas será zero.

Caso as retas r e s sejam paralelas, vamos calcular a distância entre elas tomando um ponto P qualquer de uma delas e calculamos a distância do ponto P a outra reta.

Pelas equações das retas r e s dadas, encontramos $m_r=-2=m_s$, pois $r: y=-2x-4$ e $s: y=-2x+3$, e assim $r // s$.

Fazendo $x=1$ na equação da reta r encontraremos $y=-6$, ou seja, o ponto $P=(1,-6)$ pertence a reta r.

Como $d(P,s)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, onde $P=(1,-6)$ e $s: 4x+2y-6=0$, então

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|4.1+2.(-6)-6|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, a distância d entre r e s é $d=d(r,s)=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

Dialogando e Construindo Conhecimento

Faremos algumas aplicações da teoria dos determinantes na geometria analítica. Tal teoria vai nos ajudar no cálculo de áreas de polígonos bem como estabelecer uma condição para o alinhamento de três pontos. Acesse a Plataforma Moodle para encontrar diversos problemas envolvendo este conteúdo.

3.5.2 – Condição de Alinhamento de Três Pontos

Considere três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$.

A equação da reta r que passa pelos pontos $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ é dada por:

$r: y-y_2=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$. E assim:

$$(x_c-x_b)(y-y_b)=(y_c-y_b)(x-x_b)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3.y-x_3.y_2-x_2.y+\cancel{x_2.y_2}-y_3.x+y_3.x_2+y_2.x-\cancel{y_2.x_2}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_2-y_3).x+(x_3-x_2).y+(x_2y_3-x_3y_2)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0.$$

Se os pontos *A, B* e *C* estiverem alinhados então o ponto $A=(x_1,y_1)$ pertence à reta r e, desta forma, satisfaz à equação $(y_2-y_3).x+(x_3-x_2).y+(x_2y_3-x_3y_2)=0$, que nada mais é do que

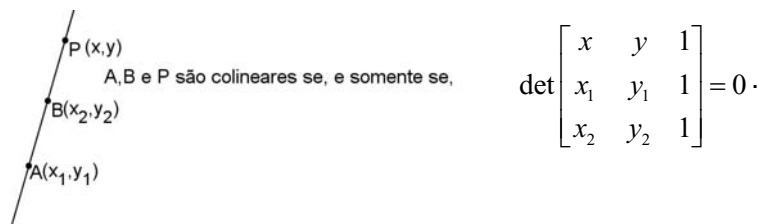
$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}=0.$$

Acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3: Três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ são colineares se, e somente se,

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}=0.$$

P (x,y)
A,B e P são colineares se, e somente se,
B(x2,y2)
A(x1,y1)

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}=0\cdot$$

Como conseqüência do teorema acima, podemos encontrar a **equação geral** de uma reta que passa pelos pontos distintos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$.

Se $P=(x,y)$ é um ponto genérico da reta r que passa por *A* e *B*. Então *P, A* e *B* são colineares e assim pelo teorema 3 temos: $\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}=0$.

Calculando o determinante acima obtemos $\underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0$ que representa a **equação geral** da reta r.

3.5.3- Área de um Triângulo

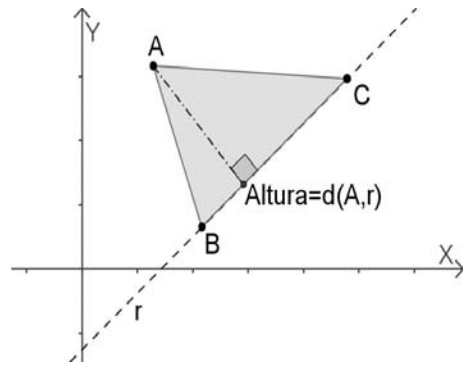
Veremos um teorema a seguir, o qual nos ajudará a determinar a área de qualquer triângulo *ABC*.

Teorema 4: A área de um triângulo cujos vértices são $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ é dada por:

$$A=\frac{|D|}{2}, \text{ onde } D=\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Observe a figura ao lado:

Note que a área do triângulo *ABC* é dada por $A_{\Delta} = \frac{d(B,C).d(A,r)}{2}$, onde $d(B,C)$ é a distância entre os pontos *B* e *C* e $d(A,r)$ é a distância do ponto *A* à reta *r* que passa pelos pontos *B* e *C*.

Temos que, $d(B,C) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$, e que a equação geral da reta *r*, que passa por *B* e *C*, é dada por:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow r : \underbrace{(y_2 - y_3)}_{a}.x + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{b}.y + \underbrace{(x_2 y_3 - x_3 y_2)}_{c} = 0.$$

Calculando a distância entre o ponto $A = (x_1, y_1)$ e a reta *r* pelo teorema 2, encontramos:

$$d(A,r) = \frac{\left|\overbrace{(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)}^{D}\right|}{\underbrace{\sqrt{(y_3 - y_2)^2 + (x_3 - x_2)^2}}_{d(B,C)}}.$$

Como já vimos, $(y_2 - y_3).x_1 + (x_3 - x_2).y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) = \det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = D$ e que

$d(B,C) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$, então $A_{\Delta} = \frac{1}{2} d(B,C).d(A,r) = \frac{1}{2} \cancel{d(B,C)}.\frac{|D|}{\cancel{d(B,C)}}$.

Portanto a área de um triângulo cujos vértices são *A, B* e *C* é $A_{\Delta} = \frac{|D|}{2}$.

4 – Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade fizemos o estudo do ponto e da reta. Amplie sua visão sobre o assunto desta unidade visitando sempre o Moodle e pesquisando na bibliografia sugerida. Os assuntos aqui são tratados de forma sucinta. Cabe a você procurar expandir seu conhecimento sempre resolvendo os exercícios deixados na plataforma e tirando suas dúvidas com os professores tutores. Lembre-se: estamos sempre ao seu lado.

5- Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações. 2ª** ed. São Paulo: Ática. Vol. 3. 2000.

2. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna. Vol. 3. 2002.

3. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

4. GENTIL, Nelson S. **Matemática para o 2º grau.** Vol. 3. Ática, 7ª ed. São Paulo: 1998.